1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3{,}5 < x_0 < 3{,}6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) g dérivable sur $]0,+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad g'(x) = 1 - (1\ln x + x\frac{1}{x})$

$= 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(1) = 1 + 1 - 1\ln 1 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + x - \underbrace{x\ln x}_{0}$

$= 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + x - x\ln x$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} 1 + x(1 - \ln x)$

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3{,}5 < x_0 < 3{,}6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) ~~Sur $]0,1[$~~

~~g continue st $\nearrow$ sur $]0,1[$~~

~~$g(]0,1[) =]1,2[$~~

~~$0 \notin]1,2[$~~

(1) sur $]0,1[$

g minorée par 1

$\Rightarrow g(x) \neq 0$

(2) Sur $]1,+\infty[$

g continue st $\searrow$ de $]1,+\infty[$ dans $]-\infty,2[$

$0 \in]-\infty,2[$

(1) et (2) L'éq $g(x) = 0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution x_0

$g(3.5) = \ldots < 0 \quad g(3.6) = \ldots > 0 \quad | \; 3.5 < x_0 < 3.6$

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

x	0		1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$			
g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	0		x_0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$(g^n)' = n\,g'\,g^{n-1}$

$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

a) $f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x\right]x}{(1+x^2)^2\,x}$

$= \frac{1+x^2 - 2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$

$= \frac{1+x^2 - x^2\ln(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

$= \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$

$\left(\frac{1}{f^2}\right)' = \frac{-2f'}{f^3}$

$\left(\frac{1}{f^n}\right)' = \frac{-nf'}{f^{n+1}}$

$(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$

$g(x) = 1 + x - x\ln x$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$2\ln a = \ln a^2$

$\frac{1}{2}\ln a = \ln\sqrt{a}$

$1+x_0-x_0\ln x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0\ln x_0 = 1+x_0$

$g(x_0)=0 \Leftrightarrow 1+x_0-x_0\ln x_0 = 0$

$\Leftrightarrow x_0\ln x_0 = 1+x_0$

$\boxed{\ln x_0 = \frac{1+x_0}{x_0}}$

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \boxed{1 + x - x\ln x}$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

$f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

$x \in]0,+\infty[$

x	0		$\sqrt{x_0}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\frac{1}{2x_0}$	$\searrow$	

$g(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2 = x_0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{x_0}$

$\forall x \in]0,+\infty[\quad . \; x(1+x^2) > 0$

$f(\sqrt{x_0}) = \frac{\ln\sqrt{x_0}}{1+x_0} = \frac{1}{2}\frac{\ln(x_0)}{1+x_0}$

$= \frac{1}{2}\frac{1+x_0}{(1+x_0)x_0} = \frac{1}{2x_0}$

x	0		$\sqrt{x_0}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2x_0}$	$\searrow$	0

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}+x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

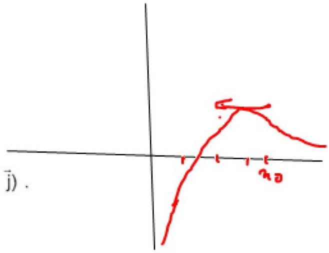
1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.



2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \ln x$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \dfrac{1+\ln n}{n}$.

$0 < t < 1$

$\Rightarrow \ln t < f(t) < \frac{1}{2} \ln t$

$\int_1^{\frac{1}{n}} \ln t\, dt \geq \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt \geq \frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{n}} \ln t\,dt$

$\frac{1}{2}\left[t \ln t - t\right]_1^{1/n} \leq a_n \leq \left[t \ln t - t\right]_1^{1/n}$

$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1+\ln n}{n} < 1$

$(a_n) \nearrow$ majorée par 1

$\Rightarrow (a_n)$ convergente

Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n} = 1 \Rightarrow \ell$

$\Rightarrow \ell \in [\frac{1}{2}, 1]$ $\quad (\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell)$

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = 1 + x – x lnx.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

$0 < x < \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \ln x < 0$

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3,6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$.

$n \in \mathbb{N}^*$

$a_{n+1} - a_n = \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(t)\,dt - \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$

$= \int_1^{\frac{1}{n+1}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt$

(formule de Chasles)

$= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(t)\,dt = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} -\underbrace{f(t)}_{t}\,dt \geq 0$

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3{,}5 < x_0 < 3{,}6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3{,}6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \le f(x) \le \frac{1}{2}\ln x$.

$0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < 1+x^2 < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+x^2} < 1$

$\xRightarrow{\times \ln x} \ln x \leq \frac{\ln x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}\ln x$

$[0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0]$